

Olemimest ja kirjeldamisest matemaatikas

Peeter Lorents

Olemisest ja eksisteerimisest

Matemaatika alustes on mõneski allikas juhitud tähelepanu sellele, et **olemine** (mingil ajal, mingis kohas, mingis seisundis jms), **pole** iseenesest sugugi alati sama, mis **olemas olemine** ehk **eksisteerimine**.

Seejuures pole iseenesest sugugi selge, mida mille eelduseks lugeda: kas **olemine eeldab eksisteerimist** – või hoopis teisipidi – **eksisteerimine eeldab olemist**?

Ehk pisut teises vaates:

- kas **sellest, et** miski **on** (mingil ajal, mingis kohas, mingis seisundis vms), **järeldub, et** see miski **eksisteerib** ehk **on olemas** – või teisipidi
- kas **sellest, et** miski eksisteerib, **järeldub, et** kõnealune **miski on** (mingil ajal, mingis kohas, mingis seisundis vms)? Või pisut lühemalt:
- kas **olemisest järeldub olemas olemine** (ehk **eksisteerimine**) – või tagurpidi –
- kas **olemas olemisest järeldub olemine** ?

Paar head küsimust:

Mõelgem järgi

- kas on mõtet kõnelda ***olemas olemisest*** ehk ***eksisteerimisest*** ilma, et seejuures oleks mingitki aimu sellest, et millal, kus, mis seisundis jne – ehk lühidalt – *milliste tingimuste kohaselt ollakse* – või teisipidi
- kas on mõtet kõnelda millegi ***olemisest*** (*mingite tingimuste täidetuse kohaselt* – nt mingil ajal, mingis kohas, mingis seisundis vms) ilma, et see, mille olemisest kõneleme, ise polegi olemas – ehk ***ei eksisteeri?***

Lepime kokku:

Millegi *olemist* ja *olemasolu* käsitleme
võrdväärsetena.

Märkus. Kokku võib leppida ka kuidagi teisiti, kuid
antud ettekande raames olgu nii, nagu äsja ülal kokku
leppisime

Mõned mõtlemist väärivad tähelepanekud. Näiteks seoses aritmeetikaga.

Matemaatika valdkondade (sh nt aritmeetika, geomeetria jt – isegi mõnedes hulgateooria) käsitlustes *ei* koormata sageli käsitluse alustamist sellega, et deklareeritakse *selgesõnaliselt* käsitletavate asjade olemasolu! Piirdutakse tähistamise ning asjakohaste väidete formuleerimisega. Nii näiteks

– **aritmeetika** käsitlustes piirdutakse sageli (mitte alati!) sellega, et võetakse kasutusele tähised naturaalarvudele (nt $1, x, y', z$ vms), määratletakse teatavaid naturaalarve (nt paaris- või paaritud arvud), sõnastatakse aritmeetika jaoks n-ö algväiteid ehk aksioome naturaalarvude käsitlemiseks (nt $x+0=x$), kuid kõige selle seas ***pole*** ei

- ***naturaalarvu mõiste määratlust*** ega
- ***väidet (nt asjakohast aksioomi) naturaalarvude olemasolu kohta;***

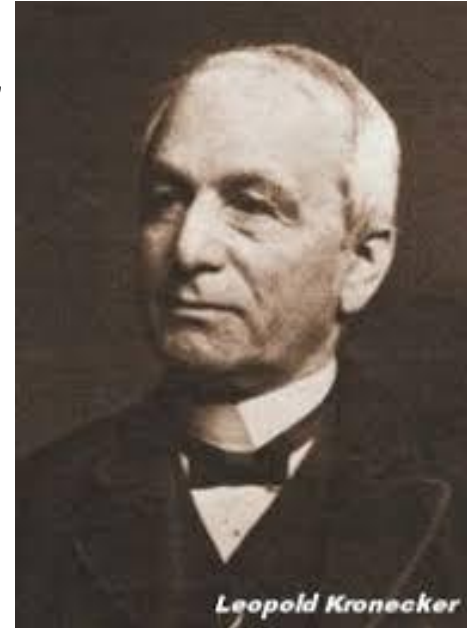
Kõik pole lootusetu, kui loodame loojale!

Aastal 1886 andis kuulus saksa matemaatik Leopold Kronecker (1823 – 1891), teistelegi teada, et: "***Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk***" (Jumal lõi täisarvud, kõik muu on inimese töö).

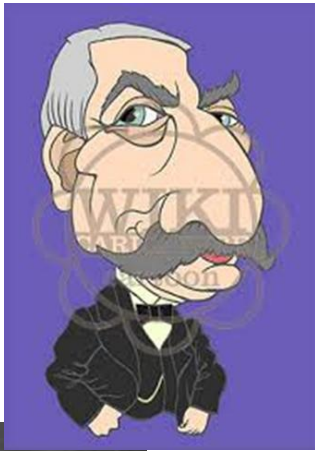
Edasi teemegi pisut „inimese tööd“: määratleme ***naturaalarvud***, kui ***sellised täisarvud, mis pole väiksemad täisarvust 0***.

Seega võiks taevane rahu Maa peale jõuda, sest „nulliga on asi selge“: tegemist on Jumala looduga (seega – ***0 on olemas!***). Kuid vastamist vajaks ka küsimus: mida tähendab „pole väiksem“?

Paraku viib *selle küsimuse* vastuse otsimine meid mitmesuguste ***hulkade, hulkade elementide, hulkade ja elementide vaheliste seoste*** juurde. Seejuures kerkib (juba hulkade juures) taaskord küsimusi: mida mõista *olemise* all; kuidas *määratleda* ja *kirjeldada* olemist või mitteolemist?



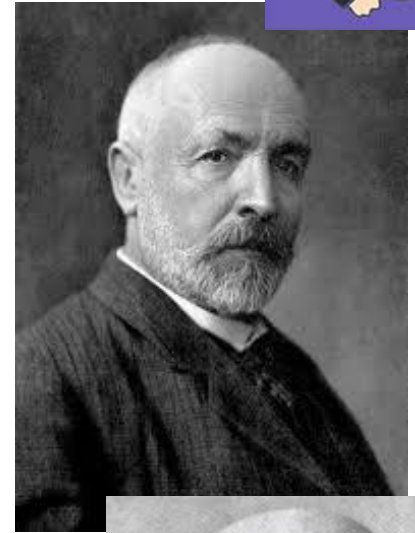
Pisut süngevõitu ajaloost. Seoses hulkadega.



Eespool tutvustatud Leopold Kronecker oli vaieldamatult tubli ja tulemuslik saksa matemaatik. Kahjuks ei suutnud ta esitada ega selgitada oma tõekspidamisi – sellest, millised on (tema meelest) matemaatika „õiged alused“ (sh alused *olemasolu* ja mitteolemasolu üle otsustamiseks), millele rajaneks tõeliselt usaldusväärne matemaatika – ilma „teisitimõtlejaid“ ründamata ja halvustamata. Kurikuulsa näitena tuuakse sellega seoses esile hulgateooria looja – saksa matemaatiku – Georg Cantori (1845 – 1918) kohatut kohtlemist Kroneckeri poolt, kes väljendas oma suhtumist näiteks sõnadega „šarlatan“, „renegaat“, „noorsoo rikkuja“ jms.

Õnneks polnud Kroneckeril selles rollis ülemäära suurt „publikumenu“. Õnnetuseks oli aga aastaid kestnud vaenamisel (Kroneckeri ja tema mõnede mõttekaaslaste poolt) muserdav mõju Cantori vaimsele ja füüsilisele tervisele.

Kindlasti kosutasid Cantori hinge maailma ühe kõigi aegade suurima õpetlase – Cantori ja Kroneckeri kaasmaalase – David Hilberti (1862 – 1943) sõnad: „**Keegi ei saa meid välja ajada paradiisist, mille on loonud Georg Cantor**“.



Olemas olemisest ehk eksisteerimisest

Siinkohal alustame mõistest **entiteet** (ingl – *entity*).

Autoriteetsete allikate kohaselt, sh

Marriam-Webster Dictionary: *an **entity** is something that exists as a separate and distinct unit, possessing its own objective or conceptual reality. ... In essence, an **entity** is anything that can be considered to have its own existence and can be distinguished from other things.*

Oxford English Dictionary: *an **entity** is defined as something that exists separately and independently, having its own distinct identity. ... An **entity** must be distinguishable from other things. It has clear boundaries and can be identified as a separate unit.*

Märkus. Pöörakem tähelepanu sõnadele: *something that exists*. Ehk eestikeeli: *miski, mis **eksisteerib** ehk on olemas.*

Eksisteerimisest antud loengus. Mõned lähtekohad (1)

➤ Millegi olemasolu ehk eksisteerimine on selle (millegi) iseärasus ehk omadus. Kui vaatleme midagi, mida saame nimetada ehk tähistada, näiteks ladina tähestiku tähega „n“, siis **väidet**, et „*n eksisteerib*“ – ehk, et „*n evib iseärasust olla olemas*“ – tähistame kirjutisega **Exist(n)**. Seejuures – väidet, et „*pole õige, et n eksisteerib*“ – ehk veidi lühemalt: „*n ei eksisteeri*“, tähistame kirjutisega **¬Exist(n)**. Kus sümbolit „¬“ kasutame siin ja edaspidi *loogilise eitamise* tähistamiseks.

➤ Seda, mida saame nimetada ehk tähistada, näiteks sümboliga „n“ ja mille korral väide, Exist(n), **pole vastuolus** olemasolevaid tõekspidamisi esitavate väidetega, nimetame edaspidi **eksistandiks, olemasolevate tõekspidamiste raames**.

Kordame: *eksistandiks, olemasolevate tõekspidamiste raames* tohime nimetada seda, mida **(1)** on üleüldse meil võimalik kuidagi nimetada või tähistada ja **(2)** mille olemasolu väide pole vastuolus olemasolevate tõekspidamistega.

Märkus. Sõna *eksistant* – ehk „inglisepärasemalt“ *existant* – tuntud teatmeteostes pole!

***-ant* lõpuga sõnadest Marriam-Websteri toel**

-ant suffix:

-ant

adjective suffix

1

: performing (a specified action) or being (in a specified condition)

somnambulant

Sellest lähtudes lepime kokku, et siin ja edaspidi kasutame uut sõna:

eksistant – olemas olija

Oluline tähelepanek olemite olemasolu väite kohta käesoleva käsitlese raames

Mitte igas loogikas ***pole täiesti õige*** niisugune väide, mille

– üheks sõnastuseks võiks olla:

Eeldusest, et ***pole õige***, et ***antud eksistandi olemasolu väitest ja mingitest (kokkuleppeliselt) õigetest väidetest järeldub vastuolu*** (st – teineteise eituseks olevad väited), ***järeldub*** omakorda ***selle eksistandi olemasolu väide***

– ja teiseks sõnastuseks võiks olla nt:

Eeldusest, et ***pole õige***, et ***käsitletava eksistandi eksisteerimise väitest ja mingitest (kokkuleppeliselt) õigetest väidetest järeldub vastuolu***, ***järeldub*** omakorda ***käsitletava eksistandi eksisteerimise väide***

– ja kolmandaks sõnastuseks võiks olla nt:

Sellest, et mingi ***antud eksistandi olemasolu väitest ja mingitest (kokkuleppeliselt) õigetest väidetest ei järeldu vastuolu***, ***järeldub*** antud eksistandi olemasolu väide.

Selgitus: Kui võtame vastuolule, õigete väidete konjunktsioonile ja eksistandi olemasolu väitele – intuitivistlikust loogikast – vastavalt järgmised **tõeväärtused: õige, vale, vahepealne** – siis meie (kolmes sõnastuses) väite **tõeväärtuseks on vahepealne ($\neq$ õige)!**

Eksistantide tähistatavuse printsiip

Igat eksistanti *peab saama* sobivalt nimetada või tähistada

– *nimetatava eksistandi kohta käivate väidete formuleerimiseks ja käsitlemiseks,*

kusjuures kõnealuse *tähise enda olemasolu väide*

– *peab olema õige ja ei tohi olla vastuolus olemasolevate tõekspidamistega*

Tasub teada

Mitmete n -ö põhiliste, tunnustatud ja kasutatavate loogikate raames:

väide $\neg\text{Exist}(n)$ on samaväärne väitega: ***väitest Exist(n) järeldub vastuolu***.

Seejuures – ***vastuoluks*** nimetatakse suvalise väite ja selle väite eituse *loogilist konjunktsiooni* (ehk n -ö kooskehtimist).

Loogilise konjunktsiooni tähistamiseks kasutame sümbolit „&“. Väite, mille tähiseks on S – ja väite, mille tähiseks on T – loogilist konjunktsiooni tähistame kirjutisega $S\&T$. Seetõttu on vastuolude tähiseks näiteks nii kirjutis $S\&\neg S$, kui ka kirjutis $T\&\neg T$.

Tähistades *loogilise järeldamise* (NB! ***Mitte järelduse***) sümboliga „ $\supset$ “ (ingliseelse sõna – *Inference* –, „stiliseeritud suur algustäht“), võime teksti „*väitest Exist(n) järeldub vastuolu*“ kirja panna järgnevalt: **$\text{Exist}(n) \supset S\&\neg S$** .

Tähistades veel *loogilise samaväärsuse* sümboliga „ $\Leftrightarrow$ “, võime teksti „***väide $\neg\text{Exist}(n)$ on samaväärne väitega: väitest Exist(n) järeldub vastuolu***“ lühidalt „ümber kirjutada“ nii: **$[\neg\text{Exist}(n)] \Leftrightarrow [\text{Exist}(n) \supset S\&\neg S]$** , kus vastuolu määratluse põhjal võib S tähistada suvalist väidet.

Eksisteerimisest antud loengus. Mõned lähtekohad (2)

Seda,

mida ***saame nimetada*** ehk ***tähistada***, näiteks sümboliga „n“, ***selleks, et*** kõnealuse nimetatu ehk tähistatu käsitlemise jaoks oleks võimalik formuleerida ja esitada asjakohaseid väiteid, kuid seejuures ***pole nõutav***, et vastav väide Exist(n) – ***pole vastuolus*** olemasolevate tõekspidamistega

nimetame edaspidi ***mõeldavaks eksistandiks olemasolevate tõekspidamiste raames*** ehk lühemalt ***teksistant*** („inglisepäraselt“ – *texistant: a thinkable existant*).

Märkus. Asjaolu, et ***mõeldava eksistandi*** olemasolu väite ja olemasolevate tõekspidamiste vastuolud ***pole keelatud ei tähenda***, et sedalaadi vastuolude puudumine ***oleks keelatud!***

Äsja öeldust edasi arutledes jõuame väiteni:

Iga eksistant on mõeldav eksistant. Ehk lühemalt – ***iga eksistant on teksistant.***

Märkus 1. Iga teksistant ei pruugi olla eksistant. Nt seda, mille nimeks on „kõikide hulkade hulk“, võime käsitleda – ja tavaliselt *hulgateoorias käsitlemegi!* Kuid – seda ju ***pole olemas***, kuigi ilmselgelt on vastav nimi kasutusel ja nimetatut käsitletakse!!!

Märkus 2. Sõna *teksistant* – ehk „inglisepärasemalt“ *texistant* – tuntud teatmeteostes pole!

Teksistantide tähistatavuse printsiip

Igat teksistanti *peab saama* sobivalt nimetada või tähistada

– *nimetatava teksistandi kohta käivate väidete formuleerimiseks ja käsitlemiseks,*

kusjuures kõnealuse *tähise enda olemasolu väide*

– *peab olema õige ja ei tohi olla vastuolus olemasolevate tõekspidamistega*

Eksisteerimisest antud loengus. Mõned lähtekohad (3) .

Küllap on mõnedki kuulnud või ise kogenud miskit, mida paraku ei oska nimetada ega selgelt kirjeldada. Midagi säärast, mille korral tekib kahtlus, et äkki polnudki midagi – ja tegu on pelgalt meelepettega. Samas aga jääb kripeldama küsimus: aga äkki siiski on tegemist millegi sellisega, mida lihtsalt pole märgatud, või kui ongi – siis pole osutunud võimalikuks seda piisavalt vaadelda, et jõuda *mingigi kirjelduse ja nimetuse*ni (mida pisutki selgemalt meenutada ja sellest teistelegi kõnelda-kirjutada). Paraku piirdutakse sellisel juhul tõdemusega, et „võib-olla pole siin miskit – ja kui äkki ongi – siis antud juhul pole (esialgu) võimalik midagi esile tuua (isegi nimegi veel pole) ...“.

Siinkohal paneme tähele, et see (nt kirjeldus, nimetus jms) – mida antud kohal või antud ajal **esialgu pole** – **ei välista** iseenesest selle esinemist mujal või muul ajal. Sellest tulenevalt pole ehk liigne kasutada asjakohast mõistet – **eel-eksistant** ehk miski, mis võib osutuda vähemalt mõeldavaks. Ehk pisut-pisut selgemalt:

Eel-eksistant ehk proto-eksistant või pre-eksistant ehk lühemalt **preksistant** („inglisepärasemalt“ – prexistant: *a pre-existent*) **on:**
see mida – **võib-olla saame mõelda ja sellega seotud väidete formuleerimiseks ja käsitlemiseks sobivalt nimetada** ehk **tähistada**.

Märkus. Nagu sõnade *eksistant*, *existant*, *teksistant* ja *texistant* korral – **ei esine** ka sõnad *preksistant* ja *prexistant* mitmetes tunnustatud teatmeteostes (nt EKSS, VSL, OED, Webster).

Preksistantide *võimaliku* tähistatavuse printsiiip

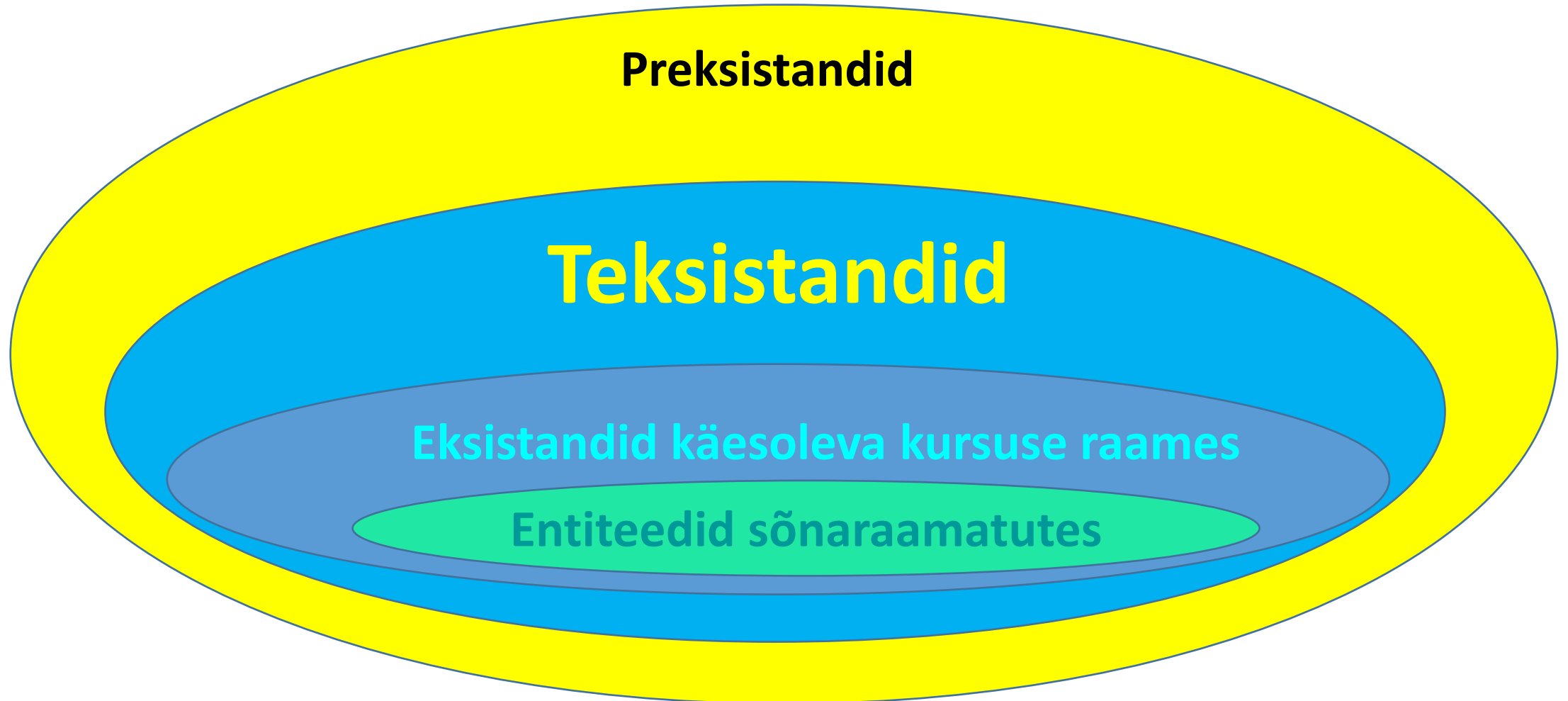
Kui

preksistandi – ehk miski sellise jaoks, mis – *võimalik, et* – osutub nimetavaks või tähistatavaks – *selleks, et* formuleerida ning käsitleda *asjakohaseid väiteid,*

siis

peab vastav (võib-olla tõesti kunagi-kusagil-kuidagi kätte saadav) *nimi* ehk *tähis* ise osutama mingiks *eksistandiks* (seega – millekski sääraseks, mille *olemasolu väide* peab olema õige ja ei tohi olla vastuolus olemasolevate tõekspidamistega)

Eespool esitatud eksisteerimisega moel või teisel seostatavate kuuluvusest üksteise piiridesse



Väike koondülevaade entiteetide, eksistantide, teksistantide ja preksistantidega seostud nõuetest

	<i>Tähise või nimetuse olemasolu</i>	<i>Olemasolu väite paikapidavust</i>	<i>Olemasolu väite kooskõla teiste kokkuleppeliselt paikapidavate väidetega</i>
Entiteetid sõnaraamatutes	Usutavasti nõutakse (otsesõnaliselt paraku mitte)	Usutavasti nõutakse (otsesõnaliselt paraku mitte)	Usutavasti nõutakse (otsesõnaliselt paraku mitte)
Eksistandid käesoleva kursuse raames	Nõutakse otsesõnaliselt	Nõutakse kaudselt (<i>eeldades: kui</i> väitest w ja paikapidavatest väidetest w' ,... , w'' , <i>ei teki vastuolu</i> , siis w on paikapidav)	Nõutakse otsesõnaliselt
Teksistandid	Nõutakse tähise <i>olemasolu</i> – kuid otsesõnaliselt vaid asjakohaste väidete jaoks	Ei nõuta	Ei nõuta
Preksistandid	Nõutakse tähise <i>võimalikku olemasolu</i> – kuid otsesõnaliselt vaid asjakohaste väidete jaoks	Ei nõuta	Ei nõuta

Hulkade kirjeldamisest ja olemasolust (1)

Esmased kokkulepped

- Lepitakse kokku kasutada nn objektsümboleid hulkade tähistamiseks
- Lepitakse kokku kasutada sümbolit „ $\in$ ” hulga elemendiks olemise seose tähistamiseks
- Lepitakse kokku kasutada sümbolit „ $=$ ” hulkade võrdsuse seose tähistamiseks
- Lepitakse kokku loogiliste tehete sümbolid ja nende kasutamise kord
- Lepitakse kokku nn abisümbolid ja nende kasutamise kord
- **Lepime siinkohal kokku**, et hulkade määratlemine ja ***kirjeldamine*** toimub eelmainitud sümbolitest kindla korra kohaselt koostatud selliste kirjutiste ehk tähisekogumite abil, mida nimetame ***valemiteks*** ja mis esitavad hulkade käsitlemiseks vajalikke ***väiteid***. **Seejuures:**
 - Valemite koostamist alustatakse *lihtsaimatest valemitest*, millel on kuju $x \in y$, sageli ka valemitest, millel on kuju $x = y$, kus x ja y on mingite hulkade tähised
 - Edasi koostatakse olemasolevatest valemitest uusi, kasutades selleks kokkulepitud korra kohaselt loogiliste tehete sümboleid

Hulkade kirjeldamisest ja olemasolust (2)

- Lisaks valemite koostamisele kasutatakse hulkade kirjeldamiseks vajalike väidete saamiseks nende **tuletamist**, mis toimub teatava kokku lepitud korra kohaselt, teatavate sammude abil, mida nimetakse **tuletussammudeks**
- Samalaadse ehitusega tuletussammud moodustavad nn **tuletusreegleid**, mille korral kõneldakse mingi konkreetse reegli rakendamisest, kui rakendatakse tuletussammu, mis kuulub vastavasse konkreetsetesse reeglisse
- Lepitakse kokku, et millised valemid ei vaja tuletamist ja millised peavad olema tuletatavad. Esimesi mainituteks nimetatakse **aksioomideks** – teisi aga **teoreemideks**. Kõikide kõnealuste aksioomide kogumit nimetatakse hulgateooria **aksiomaatikaks**. NB! Konkreetselt kokku lepitud aksiomaatika ja kõikide tuletusreeglite ning kõikide teoreemide kooslust nimetatakse **konkreetseks hulgateooriaks**, sageli nende nime järgi, kes andsid oma ja olulise panuse just antud hulgateooria loomiseks
- Lepitakse kokku, et *käsitletavat hulka* loetakse *mingis hulgateoorias eksisteerivaks* ehk **olemas olevaks**, kui nii on kirjas mõnes – *selle hulgateooria* – vastavas aksioomis või teoreemis.

Zermelo-Fraenkeli auks nimetatud ZF-hulgateooriatest (1)

Loodud valdavalt eelmise sajandi esimestele aastakümnetel. Mitmetel kordadel – nime muutmata – pisut täiendatud (erinevate autorite poolt erineval viisil).

1908 avaldas esimese asjakohase publikatsiooni saksa matemaatik Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871 –1953). Aastatel 1921 ja 1922 leidis selles teoorias puudusi ning aitas neist üle saada Saksamaal sündinud iisraeli matemaatik Abraham Halevi (Adolf) Fraenkel (אברהם הלוי (אדולף) פרנקל) (1891 –1965)

Allpool esitame mõned asjakohased aksioomid pisut täiendatud kujul. Kirjapanekute hõlbustamiseks kasutame nn metasümbolit $\mathcal{S}$, millega tähistame hulga olemist:

$\mathcal{S}(H)$ – *miski, mille tähis on H , on hulk.*



Mõned ZF aksioomid (1)

Olemasolu aksioom. *Hulgad eksisteerivad.* Ehk lühemalt $(\exists x)\text{Set}(x)$.

Tühja hulga olemasolu aksioom. *Eksisteerib hulk*, milles pole elemente.
Ehk lühemalt $(\exists y)[\text{Set}(y) \ \& \ \neg(\exists x)(x \in y)]$

Märkus. On mitmeid ZF hulgateooriaid, milles pole nt *olemasolu aksioomi*, nagu ka selliseid, milles pole *tühja hulga olemasolu aksioomi*. Kohtab ka selliseid, milles pole kumbagi eelmainitud aksioomi

Lõpmatuse aksioom. *Eksisteerib niisugune hulk H* , mille elemendiks on tühi hulk ja kui H elemendiks on hulk tähisega G , siis on H elemendiks ka hulk tähisega $G+1$, kus $G+1$ ainsateks elementideks on: hulk G **ja kui** G pole tühi, **siis** ka kõik hulgast G pärit elemendid.

Märkus 1. Lõpmatuse aksioom **ei ole** lõpmatuse definitsioon!

Märkus 2. *Lõpmatuse aksioom* ja *tühja hulga olemasolu aksioom* on sageli ainsad ZF aksioomid, milles selgesõnaliselt väidetakse **olemasolu!**

Intuitsionistlikest eksistantidest

Intuitsionistlikust ilmavaatest:

Nimetatud maailmakäsitluse üheks nõudeks on intuitsionistlikes käsitlustes esinevate väidete sisu ja tuletuste *kooskõla intuitsiooniga*.

Näide väitest (van Dahlen'i teoreem), mille tuletus pole intuitsionistidele vastuvõetav (polevat kooskõlas nende intuitsiooniga):

Leiduvad siisugused irratsionaalarvud b ja d , mille korral b^d on ratsionaalarv.

Tõestus. Vaatleme kaht alternatiivi $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ on ratsionaalarv, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ pole ratsionaalarv. Esimesel juhul võtame $b=\sqrt{2}$ ja $d=\sqrt{2}$. Teisel juhul $b=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ja $d=\sqrt{2}$.

Intuitsionist küsib: Kui kõnealused b ja d on olemas, siis palun esitage need! Kas mõni siinviibija oskab esitada, või teab kedagi – kes seda suudab?

Siit jõuame intuitsionistliku käsitluse aluste juurde:

Intuitsionistide jaoks on tegemist eksistandiga juhul, kui see on konstrueeritav millestki, mille olemasolu intuitsionistid kindlalt usuvad. Näiteks: *tühi hulk* ja *kõikide naturaalarvude hulk*. Ehk teiste sõnadega: *olemas olemine seisneb konstrueeritavuses, lähtudes sellest, mis juba olemasolevaks on tunnistatud.*

Erinevast intuitsioonist

Üks, kes nägi suurt vaeva, et formuleerida oma intuitsiooni selliselt, et teisedki matemaatikud kasu saaksid, oli suur Hollandi matemaatik ja filosoof, Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881 – 1966), keda sõbrad lihtsalt Bertiks kutsusid.



Tema õpilastest väljapaistvaimaks oli Arend Heyting (1898 – 1980), kes oma õpetaja ideedest lähtudes ja neid edasi arendades, ehitas üles intuitsionistliku matemaatika ning vastava „mõtlemistehnoloogia“ – **intuitsionistliku loogika** (matemaatilised) alused.



Mõneti kurioosne on seejuures asjaolu, et Brouwer oli lausa põhimõtteliselt vastu püüdlustele – anda intuitsionistliku ilmavaate teatavatele alusideedele range matemaatiline ülesehitus – ja olevat iseloomustanud Heyting'i töid (mille üheks tulemiks on Brouwer'i algebrad!) sapisevõitu sõnadega: *steriilsed harjutused*.

Hoopis radikaalselt lähenes hulkadele vene matemaatik Aleksandr Jesenin-Volpin (1924 – 2016), kes keeldus tunnistama hulkasid, mille *elementide arv* polnud tema arvates **füüsiliselt arvutatav**!



Kokkuvõtteks

Paljude teaduste tulemuste saavutamise ja nende usaldusväärsuse tagamise instrumendiks loetavas *matemaatikas* ja – vist valdavalt – matemaatika enese aluseks peetavas *hulgateoorias* ning selle usaldusväärseks ülesehitamiseks vajalikus *matemaatilises loogikas* pole siiani üksmeelt selles, mis on **olemas olemine** ehk **eksisteerimine** ja kuidas seda peaks käsitlema.

Eespool oli ehk võimalik saada algset ettekujutust mõnest lähenemisviisist, mida ei pea ju ilmtingimata omaks võtma, kuid vähemalt võib aktsepteerida ühena paljudest, hoolikalt mõtestatud ja võimalikest lähenemisviisidest, mille kõrvale (või lausa asemele) ei keela keegi – ka väga noorel inimesel **oma käsitlust** luua.

Viimast väidet peaks loodetavasti kinnitama tõsiasi, et Austria-Ungari päritoluga USA matemaatik – John von Neumann (1903 – 1957) oli vaid **22. aastane**, kui lisas hulgateooriasse *regulaarsuse aksioomi*, aastal 1925 ilmunud publikatsioonis.



IN TEENS Von Neumann was a student in Budapest.

Küllap on, mille üle mõelda ... ja ...

***kui edaspidi pisutki eelnevalt esitatu üle mõtlete,
siis olen teile väga tänulik, et ära kuulasite!***