# MÄLUST MATEMAATIKAS

**Peeter Lorents**

# La Rochefoucold mälust:

- Tout le monde se plaint de sa memoire es personne ne se plaint de son jugement
- Kõik kiruvad oma ***halba mälu***, kuid keegi ei kiru oma tervet mõistust

# François VI, deuxième duc de La Rochefoucauld prince de Marcillac (1613 – 1680)

Kuigi päritolult aristokraat, ei saanud ta noores eas kuigi korralikku haridust, nagu ta üksteist nooremat õde-venda. See-eest tegeles üsna innukalt sõja- ning jahikunstiga ning oma tunnustatud tarkuse omandas ta hiljem ise end harides.

Olles saanud 17, asus osalema 30-aastases sõjas. Seejärel paistis silma pärast kuningas Louis XIII surma regent-kuninganna – Austria Anna toetajana ning kardinalide Richelieu ja Mazarini vastasena. Sisulise kodusõja ühes lahingus tulistati teda näkku, misjärel pidi ta peaaegu nägemise kaotama. Päikesekuningas Louis XIV pagendas ta pikaks ajaks oma noorusmaadele. Seal tegeles La Rochefoucauld oma maade-mõisate majandamise, eneseharimise ja filosofeerimisega. Lõpuks kuningas leebus ja kutsus ta õukonda, andes heldelt sissetulekuid ja ameteid ka La Rochefoucold poegadele.

La Rochefoucauld' peateoseks loetakse aforismikogu "Mõtisklused ehk Moraalsed sententsid ja maksiimid" (Réflexions ou Sentences et Maximes morales), just sealt on „laenatud“ eespool esitatud mõte mälu kohta.

# Tähelepanek (mitte määratlus ega postulaat), millest alustame

**Mälu märkame, kui vajame oma eesmärgi saavutamiseks midagi sellist, mis peaks *eelnevalt* (ehk eespool, enne, varem vms) juba olemas olema**

# Oluline on siinkohal kõigepealt selgitada, mida peaks tähendama ***„eelnevalt“***

- Kõigepealt **lepime kokku**, et **eelnemine/järgnemine** olgu meie poolt välja valitud selliste **järjestatud paaride kogum**, mille korral oleme otsustanud, et esimest paarilist nimetame ***eelnevaks*** ja teist paarilist aga ***järgnevaks***
- Seejuures **lepime kokku**, et ***kui mõnel juhul pole kokku lepitud teisiti***, siis **eelneda või järgneda võib ka iseendale**
- **NB! Matemaatikas nimetatakse välja valitud järjestatud paaride kogumeid *binaarseteks seosteks***
- Seega *eelnemist/järgnemist esitab matemaatikas* mingi sobiv ***binaarne seos***
- Tavaliselt kutsutakse matemaatikas eelnemise/järgnemise seoseid lühemalt: ***järjestusseosed***

# Pangem tähele ja jätkem meelde!

- Matemaatilise käsitlusviisi raames pole järjestusseos mõeldav, kui pole olemeid ehk entiteete (nt asju, kooslusi, nähtusi, protsesse jms), mida järjestada
- Samadest olemitest koosnevaid kogumeid võib alati „ümber järjestada“. Selleks tuleb lihtsalt moodustada olemasolevatest olemitest teistsuguseid järjestatud paare (nt mõningaid või lausa kõiki olemasolevaid paare „lõhkudes“ või uusi „kokku pannes“)

# Järjestusseoses olemise tähistamisest

Järjestusseoses olemise kirjapanekuks kasutame edaspidi nt kirjutist **$J(\alpha,\beta)$**, või **$\alpha J\beta$**, kus J olgu mingi konkreetse järjestusseose tähis, $\alpha$ ning $\beta$ aga mingite just selles järjestuses olijate tähised.

# Järjestusseoste liigitamisest

Järjestusseoste liigitamise aluseks on asjakohased kokkulepped tingimuste, nõuete vms osas, mis ***peavad olema täidetud*** vastavasse liiki arvatavate järjestusseoste korral.

Mõned näited:

**Osaliseks järjestusseoseks** olemiseks peavad olema täidetud järgmised tingimused

- Iseendaga seostatuse ehk ***refleksiivsuse tingimus*** – järjestusseosega osaliselt järjestatud olemid ehk entiteedid, peavad selles seoses olema kõik „kohustuslikus korras“ iseendaga seostatud. Lühidalt: $J(\alpha,\alpha)$ ehk $\alpha J\alpha$ iga $\alpha$ jaoks
- Seoses olemise edasikanduvuse ehk ***transitiivsuse tingimus*** – kui osutub, et mingite olemite $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ korral $\alpha$ on seoses J olemiga $\beta$, $\beta$ on omakorda seoses olemiga $\gamma$, siis on ka olemid $\alpha$ ning $\gamma$ teineteisega seoses J. Lühidalt: Kui $J(\alpha,\beta)$ ning $J(\beta,\gamma)$ – siis $J(\alpha,\gamma)$. Ehk – kui $\alpha J\beta$ ning $\beta J\gamma$, siis ka $\alpha J\gamma$.

# Mõned järjestusseoste liikide näited:

# osalise järjestuse seos

**Osaliseks järjestusseoseks** olemiseks peavad olema täidetud järgmised tingimused

- Iseendaga seostatuse ehk ***refleksiivsuse tingimus*** – järjestusseosega osaliselt järjestatud olemid ehk entiteedid, peavad selles seoses olema kõik „kohustuslikus korras“ iseendaga seostatud. Lühidalt: $J(\alpha,\alpha)$ ehk $\alpha J\alpha$ iga $\alpha$ jaoks
- Seoses olemise edasikanduvuse ehk ***transitiivsuse tingimus*** – kui osutub, et mingite olemite $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ korral $\alpha$ on seoses J olemiga $\beta$, $\beta$ on omakorda seoses olemiga $\gamma$, siis on ka olemid $\alpha$ ning $\gamma$ teineteisega seoses J. Lühidalt: Kui $J(\alpha,\beta)$ ning $J(\beta,\gamma)$ – siis $J(\alpha,\gamma)$. Ehk – kui $\alpha J\beta$ ning $\beta J\gamma$, siis ka $\alpha J\gamma$
- „Niipidi ja tagurpidi“ tohivad osalise järjestuse seoses olla vaid samad entiteedid. Seda tingimust kutsutakse – ***antisümmeetria tingimus***. Lühidalt: Kui osutub, et $J(\alpha,\beta)$ ning samas ka tagurpidi – $J(\beta,\alpha)$, siis $\alpha=\beta$. Ehk – kui $\alpha J\beta$ ning $\beta J\alpha$, siis $\alpha=\beta$.

Näiteks kõikide naturaalarvude hulgas N, kus N={0,1,2,3, …. } on seos $\leq$ osalise järjestuse seoseks, seos $<$ aga pole osalise järjestuse seoseks. Muide – teguriks olemise seos (nt 2Teg4, 2Teg6, 3Teg6, 1Teg$\beta$, …) on samuti osalise järjestuse seoseks!

# Mõned järjestusseoste liikide näited:

## lineaarse järjestuse seos

Lineaarseks järjestuseks on tarvilik, et oleksid täidetud ***kõik osalisele järjestusele esitatud*** tingimused ja veel ***lineaarsuse tingimus***: igal kahel lineaarse järjestuse seoses J olijal $\alpha$ ning $\beta$ on vaid kolm võimalust:

1) $J(\alpha,\beta)$ ehk $\alpha J \beta$
2) $J(\beta,\alpha)$ ehk $\beta J \alpha$
3) $\alpha=\beta$

Näiteks kõikide naturaalarvude hulgas N={0,1,2,3, …} rahuldab seos $\leq$ lineaarsuse tingimust, teguriks olemise seos Teg – ei rahulda (nt arvud 3 ja 8 pole kumbki teisele teguriks ja pole ka teineteisega võrdsed).

**Tasub teada:** sõna „lineaarne“ tuleneb ladinakeelsest sõnast ***linea***, mille tähenduseks on näiteks *joon*, kuid samuti ka … *linane nöör*. Niisiis väljendab lineaarsus n-ö ühel joonel olemist, või siis nööril paiknemist.

**Tähelepanu vääriv eksiarvamus:**
***ajahetked on teineteisega lineaarse järjestuse seoses***

Selgituseks: Aja – õigemini aegade – käsitlus mitmetes füüsika valdkondades ei välista mitte-võrreldavate ajahetkede esinemist.

Sh – pole välistatud segadused mineviku, oleviku ja tulevikuga.

**Siit hoiatus:** mälu olemuslik seos järjestusega võib eelnemise olemust tõsisemalt tundmata tekitada „iseenesestmõistetavaid“ illusioone, sh mäluga seostuva eelneva-järgneva mõtestamist ainult ajalise mineviku-oleviku-tulevikuna. Ja mis veel hullem lineaarse (või lausa „ainumõeldavalt sirgjoonele“ surutud sündmuste) järjestusena.

# Meenutame koolimatemaatikat

Olgu vaja ***peast arvutada*** ruudu pindala, kui selle külje pikkus on 98 cm.

- Teeme ära! $98^2$=98x98. Koolis ju õpetati, kuidas – samm-sammu järel sirgelt ja selgelt:

Kõigepealt arvutame 8x8=**64**. Seejärel arvutame 8x9=**72** ning „jätame meelde ja liidame“ **64**

**720**

784

Nüüd arvutame 9x8=**72**. Seejärel arvutame 9x9=**81** ning „jätame meelde ja liidame“ **72**

**810**.

882

Lõpuks „jätame meelde ja liidame“ **7 8 4**

**8 8 2 0**.

(+1)**9** (+1)**6** **0** **4**. Imelihtne, kas pole!?

# On ka teisi viise, et kätte saada 98x98

- Meenutame, et 98=100 – 2. Nüüd arvutame 98x98=(100 – 2)x98=100x98 – 2x98= =9800 – 196=9604
- Meenutame, et (p – q)x(p – q)=pxp – 2xpxq + qxq.

  Nüüd arvutame 98x98=(100 – 2)x(100 – 2)=100x100 – 2x100x2 + 2x2=

  =10000 – 400 + 4=9604

**Tähelepanu!** *Kuhu kadus „sirgjooneline" eelnevate asjade „enne-ära-tegemise" sammustik*?

Ja tõesti on ju ükskõik, kas kõigepealt leiame eelnevalt 100x100, 2x2 või 2x100x2. Pole oluline, kas arvutame enne 100x100 – 2x100x2, seejärel aga liidame tulemusele 2x2, või kõigepealt siiski arvutame 100x100 + 2x2, seejärel aga lahutame tulemusest 2x100x2.

Niisiis: *arvutamistel tuleb sageli ühte-teist eelnevalt kätte saada, kuid see* ***ei pruugi*** *toimuda mingi etteantud ainumõeldava „sirgjoonelise ajakava" alusel*.

# Oluline tähelepanek: matemaatikas esineb külluses tegevusi, mis eeldavad millegi eelnevat „juba olemas olemist“ või eelnevat „ärategemist“. Seejuures ei nõuta „sirgjoonelisust“

- Tüüpilisi näiteid pakub kooligeomeetria, kus näiteks tüvipüramiidi täispindala leidmiseks tuleb eelnevalt leida mitmete hulknurkade pindalad.

Vahekokkuvõte: näidete alusel võib tõsikindlalt väita, et matemaatika vajab mälu. Siit kohast aga kipub kerkima pisut kiuslik küsimus:

**kas mälule tuginemine matemaatikas piirdub ainult n-ö elementaarmatemaatikaga?**

# Mälule tuginemine matemaatikas: *rekursioon*

- Üldjoontes seisneb *rekursioon* selles, et tulemuste saamiseks astutavad sammud, alamtegevused vms on üksteisega järjestusseoses ning seejuures on antud selgelt formuleeritud protseduurid, kuidas eelnenust lähtudes jõuda järgnevani
- Sõna rekursioon tuleneb ladinakeelsest sõnast *recurso* – mis märgib tagasipöördumist (eelnenu juurde)

Järgnevalt esitame mõned näited rekursiooni ilmingute kohta.

# Üks väga vana ja kuulus meetod

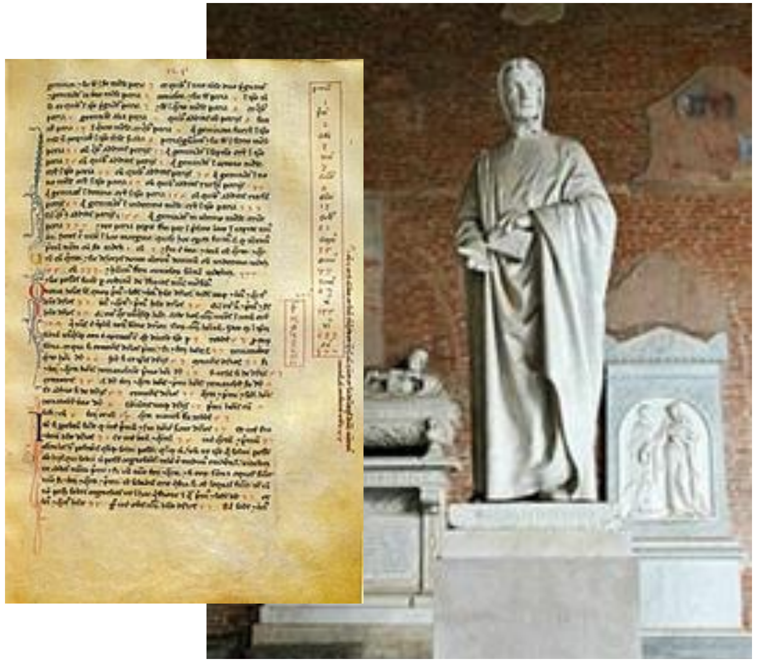
Valem ruutjuure lähisväärtuste leidmiseks:

Olgu meil antud mittenegatiivne reaalarv $\alpha$, millest tuleb leida ruutjuur $\beta$. Vahel pole see keeruline (nt kui osutub, et tegemist on nn täisruuduga, nagu näiteks $\alpha=1$, $\alpha=4$, $\alpha=9$ jms). Aga mis siis saab kui nt $\alpha=2$, $\alpha=2/3$? Sellisel juhul kasutame nn lähisväärtuste $\beta_0$, $\beta_1$, $\beta_2$, …, $\beta_n$, $\beta_{n+1}$, … leidmist, soovides, et **lim $\boldsymbol{\beta_n = \alpha}$**.

Soovitatakse valemeid: $\beta_0=0{,}5903\alpha + 0{,}4173$, $\beta_{n+1}= 0.5(\beta_n + \alpha/\beta_n)$.

Meetodi „tuuma“ esitab toodud valemitest teine ja selle autoriks arvatakse olevat kuulus õpetlane Heron Aleksandriast (Ἥρων ὁ Ἀλεξανδρεύς). Paraku pole tema eluaastate kohta täpseid andmeid (usutavasti elas Heron esimesel sajandil, mida väidetavalt kinnitavat tema ülestähendused 13.03.62 toimunud kuuvarjutusest)

# Fibonacci arvud

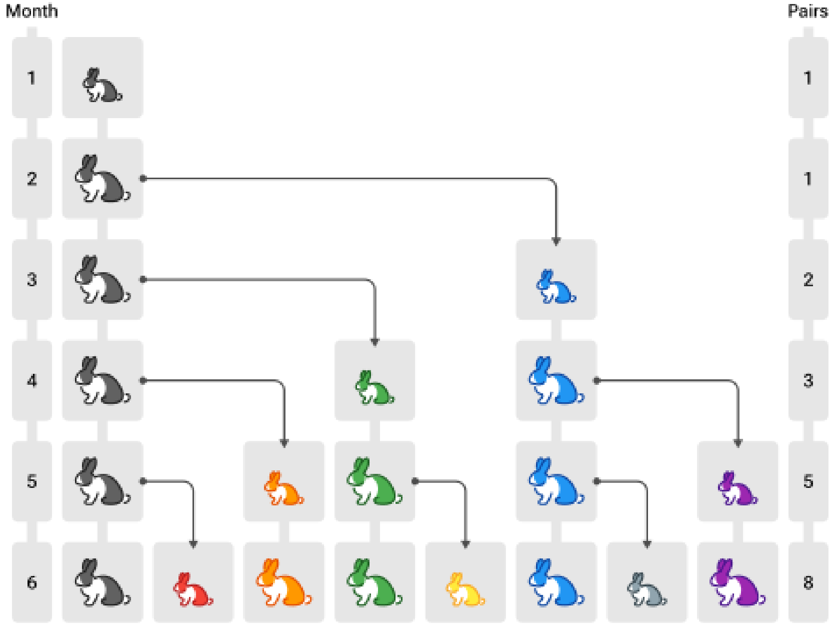


Arvud, mida tänapäeval tuntakse Fibonacci arvudena on seotud jänkude populatsiooni arvukuse hindamise ülesandega aastal 1202 valminud raamatust *Liber Abaci*, mille autoriks oli „Keskaja Läänemaailma talendikaim matemaatik“, Pisa Vabariigist pärit ja umbes aastatel 1170 – 1240–50) elanud Fibonacci (sõnadest *filius Bonacci* – Bonacci poeg) ehk Leonardo Bonacci ehk Leonardo Bigollo Pisano (rändaja Leonardo Pisast).

Paraku tuleb ka siinkohal tõdeda, et sedalaadi probleemidega, mida iseloomustavad Fibonacci arvuc tegeldi ammuilma enne Indias ja Araabiamaades.

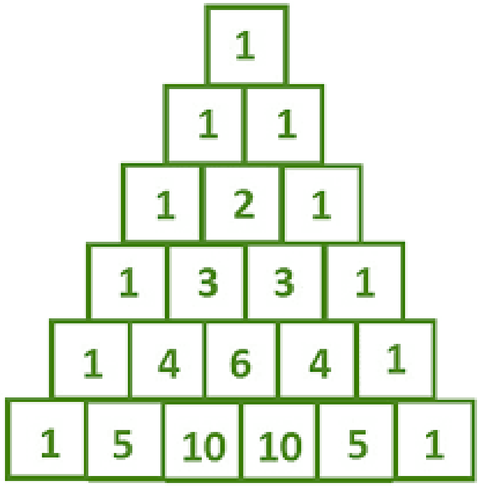
Nüüd aga asjakohased valemid: $F_0 = 0, \quad F_1 = 1,$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$



# Binominaalkoefitsiendid

Kõnealuste koefitsientide nimetamiseks ja tähistamiseks on palju viise. Palju on ka valdkondi, kus neid rakendada. Väidetavalt mängis nende esile tõusul suurt rolli nn Pascali kolmnurk. Samas kõneldakse sellest, et nimetatud suurusi on käsitletud juba kümnendal ja üheteistkümnendal sajandil araabia ning india matemaatikute poolt. Termin Pascali kolmnurk – tuleneb suure prantsuse õpetlase – Blaise Pascal (1623 – 1662) – nimest.



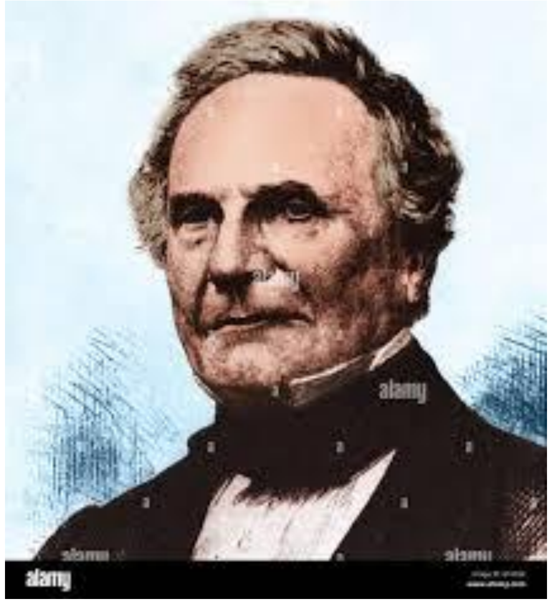

Meil on siinkohal huvi asjakohase rekursioonile tugineva valemi vastu

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Pole vast liiast teada, et oma suurt arvutamistööd tegeva (Normandia Intendandist) isa vaeva vähendada, konstrueeris Pascal nn aritmomeetri.

# Babbage masin

Üsna lähedale jõudis tänapäevases mõttes digitaalse universaalarvuti konstrueerimise ja väljaehitamisega Inglise matemaatik Charles Babbage (1791 – 1871).



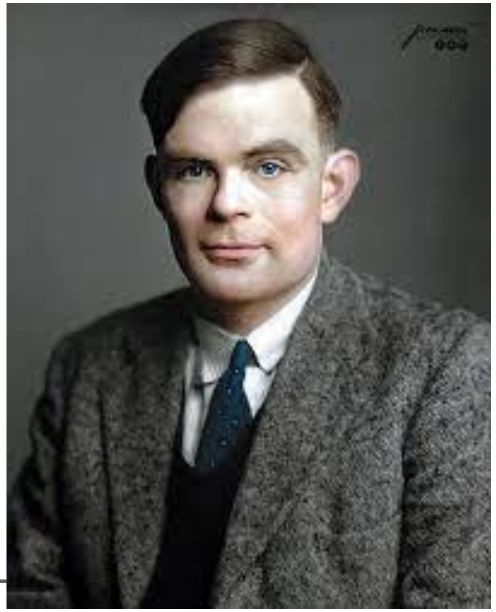
Paraku ei osutunud kõnealuse lõpuni välja ehitamine võimalikuks tehnilise teostuse liiga väikese täpsuse tõttu.

Tõsi – valminud osa masinast tarvitati rahvaloenduse andmete töötlemiseks.

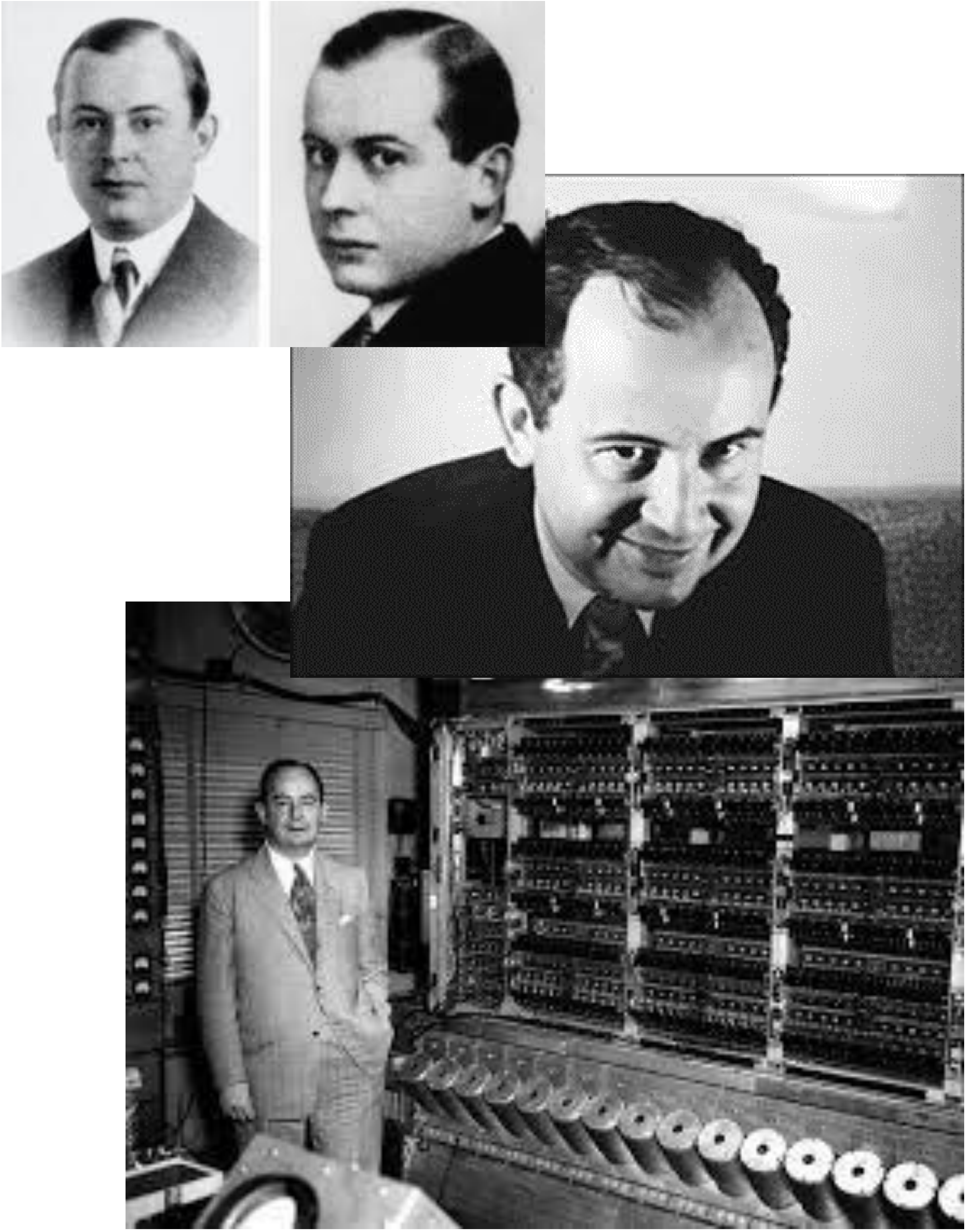
# Rekursiooni uurides jõuti rekursiooniteooriani

Rekursiooniteooria ehk rekursiivsete funktsioonide teooria ehk algoritmilise arvutatavuse teooria üheks loojaks peetakse Inglise geniaalset matemaatikut, kelle nimeks Alan M. Turing (1912 – 1953). Temalt pärineb idee kasutada rekursiivsete funktsioonide käsitlemiseks n-ö abstraktseid masinaid, mida tänapäeval tuntakse Turingi masinatena.

Antud ettekande aspektist on seejuures oluline nende masinate **mälude** (sise- ja välismälu) **olemasolu**!




# John von Neumann ja tänapäevased arvutid



Võib vist väita, et praegu veel enamiku kasutusel olevate arvutite teoreetilise baasi lõi Austria-Ungari päritoluga USA matemaatik John von Neumann, kes – olles siis vaid 19 aastane!) ühtlasi lõi suurepärase teooria teatavat sorti (nn täielike) järjestuste käsitlemiseks.

Tõsi *sel ajal* oli tema nimeks János Lajos Neumann (vt von Neumann 1923), kelle „ametlikuks nimeks“ oli alates aastast 1913 János Neumann de Margitta (kui Austria Keiser Franz Jozeph tõstis Jánosi juuradoktori kraadiga ning pangandusega tegeleva isa – Miksa Neumanni – riigile osutatud suurte teenete eest aadliseisusesse). Pisut hiljem tekkis sellest saksapärane Johann von Neumann, millest – pärast tööle ja elama asumist USAs – „kujunes lõplikult“ John von Neumann.

# Mälule tuginev metoodika: induktsioon

Kunagi olevat üks isa soovinud, et tema poeg tööasjadega tegelemist ei häiriks ja pakkus poisile (tulevasele maailma matemaatikute kuningale) puremiseks tõelise pähkli: liida kokku kõik naturaalarvud nullist sajani. Paraku ilmnes üllatavalt kähku, et ülesanne … oli kiirelt ja veatult ära tehtud.

Asja uurimine tõi ilmsiks järgmise tõsiasja, mida nutikas arvutaja oli märganud:

0+1=1(1+1)/2, 0+1+2=2(2+1)/2, 0+1+2+3=3(3+1)/2, jne, jne. Seega – 0+1+2+3+4+…+100=100(100+1)/2. OK! Oletame, et kuni arvuni 100 ongi nii, kuid – **kas *nii* on alati?!**

Selgub, et on. Veendume. Alustame tähelepanekust, et arvul 0 ***temast erinevaid eelnevaid*** naturaalarvusid pole. Igal muul naturaalarvul aga on. Näiteks arvule 3 eelnevad temast erinevad 0, 1, 2.

Kontrollime väidet: **kui arvu n korral kõikide temast erinevate eelnevate arvude m puhul 0+…+m=m(m+1)/2, siis ka 0+…+n=n(n+1)/2.**

Tõepoolest: Kui arvul n on temast erinevaid eelnevaid, siis 0+…+n=0+…+(n – 1)+n. Samas: 0+…+(n – 1)=(n – 1)((n – 1)+1)/2=(n – 1)n/2.

Seetõttu 0+…+n=**0+…+(n – 1)**+**n**=**(n – 1)n/2** + **n**=n(n+1)/2

# Induktsiooni printsiip, tõestamine induktsiooni abil

**Kui**

- mingite olemite kogumi elementide vahel on moodustatud järjestusseos **J** (st välja valitud ja „paari pandud“ sobivad esimesed ja teised paarilised),
- kusjuures seos **J** rahuldab ***induktsiooni printsiipi*** ehk kui iga olemi ***m*** korral ***sellest, et*** iga ***talle eelneva*** ja ***temast erineva*** olemi ***t*** (st J(t,m) ja t≠m) korral on täidetud tingimus ***T*** – ehk ***T***(t) – ***järeldub, et*** ka olemi m korral on täidetud sama tingimus – ehk ka ***T***(m),

**siis**

- **kõikide vaadeldava olemite kogumi iga elemendi n korral** on täidetud tingimus ***T*** ehk ***T***(**n**).

Äsja esitatud printsiipi nimetatakse induktsiooni printsiibiks ehk Noetheri induktsiooni tingimuseks, selle kontrollitud ***täidetusele tuginevat*** tõestamist nimetatakse ***tõestamiseks induktsiooni abil.***

**Näeme, et tõestamine induktsiooni abil tugineb meie arusaamale mälu olemasolu ja kasutamise kohta.** Meenutame: ***mälu märkame***, kui vajame oma eesmärgini jõudmiseks midagi sellist, mis peaks *eelnevalt* (ehk eespool, enne, varem vms) juba olemas olema.

# Emmy Noether ja induktsioon

Emmy Noether (1882 – 1935) – eelmise sajandi, kui mitte üle aegade väljapaistvaim naismatemaatik tegeles antud valdkonnaga (ehk nn transfiniitse induktsiooniga) nn oma loomingu teisel perioodil 1920 – 1926.

Nagu väljapaistvate õpetlaste puhul sageli – polnud abstraktse algebra valdkond ainus, milles ta silmapaistvaid tagajärgi saavutas.

Üheks neist on kahtlemata nn füüsika põhiteoreem (mille erijuhtudena saab käsitleda impulsi jäävuse seadust, pöördimpulsi jäävuse seadust, energia jäävuse seadust jms). See teoreem on pärit Noetheri esimesest loomeperioodist. Täpsemalt – tõestatud sai see aastal 1915, kuid publitseeriti alles aastal 1918.

# Kokkuvõtteks

- Matemaatika tugineb olulises osas mälule, kuna paljude oluliste arvutuste ning tõestuste teostamiseks vajatakse mingite eelnevate olemasolu ja kasutamise võimalusi
- Just matemaatikud on andnud tänapäeval rakendatava teoreetilise aluse ja mõtestatuse arvutite ning neis vajaliku mälu tarbeks
- Ja veel – kes ei mäleta minevikku, elab tulevikuta (kes nõnda väitis?! Ega ometi tema… )